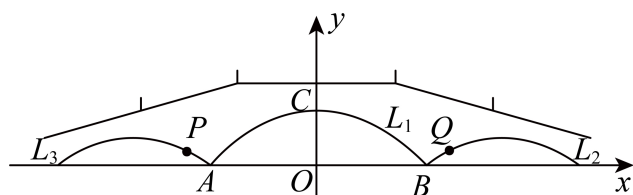


二次函数解答题分类 1 求目标点横纵/比大小

一、解答题

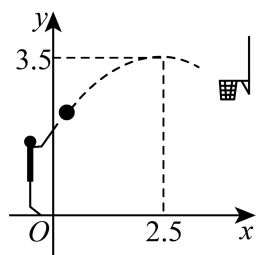
1. 一座三拱桥横跨于湖面之上，三个桥洞 L_1, L_2, L_3 均呈抛物线型且抛物线形状相同，如图所示，以 AB 中点 O 为坐标原点， AB 所在直线为 x 轴， OC 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系. 已知：桥洞 L_1 的最大高度 OC 为8米，跨度 $AB=32$ 米，桥洞 L_2, L_3 关于 y 轴对称，且最大高度均为4米.



(1)求桥洞 L_1 所在抛物线的函数表达式;

(2)如图所示，现需要在桥洞 L_2, L_3 上安装两盏靠近 y 轴的照明灯 Q, P ，且照明灯的高度都是2米，请计算照明灯的水平距离 PQ 的长度.

2. 如图是篮球运动员甲在投篮时的截面示意图，当他原地投篮时，分别以水平地面为 x 轴，出手点垂直方向为 y 轴建立平面直角坐标系，篮球运行的路线可看成抛物线，甲投出的篮球在距原点水平距离2.5米处时，达到最大高度3.5米，且应声入网，已知篮筐的竖直高度为3.05米，离原点的水平距离为4米. (本题中统一将篮球看成点，篮筐大小忽略不计)



(1)求此抛物线的解析式;

(2)若防守队员乙在原点右侧且距原点1米处竖直起跳，其最大能摸高3.2米，问乙能否碰到篮球？并说明理由.

3. 新中国成立以来，几代人逢山开路，遇水架桥，正在加快建设交通强国. 如图1是某地高速公路上修建的两个隧道，如图2是其横截面示意图.



图1

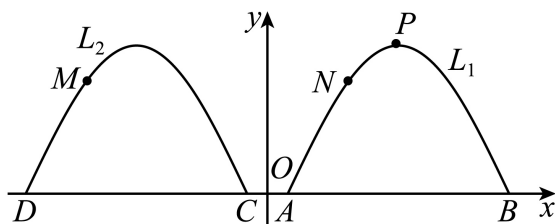


图2

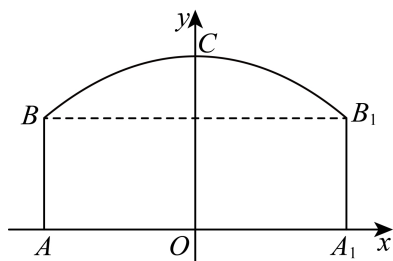
素材一：隧道 L_1 与 L_2 均呈抛物线型，已知隧道 L_2 底部 C 与隧道 L_1 底部 A 相距 $2m$ ，以直线 AC 为 x 轴，线段 AC 的中垂线为 y 轴建立平面直角坐标系，点 D 、 B 都在 x 轴上。

素材二： L_1 所在抛物线与 L_2 所在抛物线关于 y 轴对称， L_1 底部宽 AB 为 $12m$ ， L_1 所在抛物线的最高点 P 与路面 AB 的距离为 $8m$ 。

(1)求隧道 L_1 所在抛物线的表达式；

(2)现需在隧道 L_1 、 L_2 内壁上分别安装摄像头 N 、 M ，如图2所示，即 N 、 M 均在各自抛物线对称轴左侧的抛物线上，已知点 M 、 N 到路面 AC 的竖直距离均为 $6m$ ，求 M 、 N 两点间的距离。

4. 如图，隧道的截面由抛物线和长方形构成。长方形的长为 $16m$ ，宽为 $6m$ ，抛物线的最高点 C 离路面 AA_1 的距离为 $8m$ 。



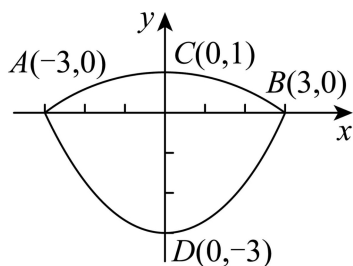
(1)按如图所示的直角坐标系，求表示该抛物线的函数表达式；

(2)一大型货运汽车装载某大型设备后高为 $7m$ ，宽为 $4m$ 。如果该隧道内设双向行车道，在两车道之间设置宽度为 $1m$ 的隔离带，且要求货车与隧道内壁 AB （ A_1B_1 ）及隔离带水平方向都至少保持 $0.5m$ 安全距离，那么这辆货车能否安全通过？请说明理由。

5. 我们常见的炒菜锅和锅盖都是抛物线面，经过锅心和盖心的纵断面是两段抛物线组合而成的封闭图形，不妨简称为“锅线”，锅口直径为 $6dm$ ，锅深 $3dm$ ，锅盖高 $1dm$ （锅口直径与锅盖直径视为相同），建立直角坐标系如图①所示，如果把锅纵断面的抛物线记为 C_1 ，把锅盖纵断面的抛物线记为 C_2 。



实物图



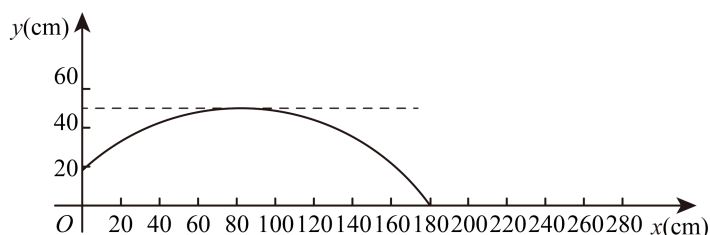
图①

(1)求 C_1 和 C_2 的解析式;

(2)如果炒菜时锅的水位高度是 $1dm$, 求此时水面的直径;

(3)如果将一个底面直径为 $3dm$, 高度为 $3.2dm$ 的圆柱形器皿放入炒菜锅内蒸食物, 锅盖能否正常盖上? 请说明理由.

6. 已知乒乓球桌的长度为 $274cm$, 某人从球桌边缘正上方高 $18cm$ 处将乒乓球向正前方抛向对面桌面, 乒乓球的运动路线近似是抛物线的一部分. 建立如图所示的平面直角坐标系, 设乒乓球离桌面的竖直高度为 ycm , 离球桌边缘的水平距离为 xcm .



(1)从乒乓球抛出到第一次落在球桌的过程中, y 与 x 近似满足函数关系

$$y = a(x - h_1)^2 + k (a < 0).$$

x 与 y 的几组数据如下表所示:

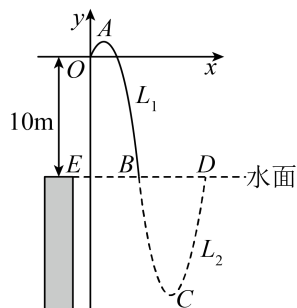
水平距离 (cm)	0	40	80	120	160	180
竖直高度 (cm)	18	42	50	42	18	0

根据表中数据, 直接写出乒乓球离桌面竖直高度的最大值, 并求出满足的函数关系式.

(2)乒乓球第一次落在球桌后弹起, 它离桌面的竖直高度 y 与离球桌边缘的水平距离 x 近似满足函数关系 $y = -0.005(x - h_2)^2 + 8 (h_2 > 180)$, 通过计算说明乒乓球再次落下时是否仍落在球桌上.

7. 如图, 在平面直角坐标系中, 某跳水运动员站在跳台上的 O 处进行 $10m$ 跳台跳水训练, 水面平行于 x 轴, 水面边缘点 E 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2}, -10\right)$. 运动员 (将运动员看成一点) 在空中

运动的路线是经过原点 O 、最高点 A 、入水点 B 的抛物线 L_1 ，最高点 A 的坐标为 $\left(1, \frac{5}{4}\right)$.

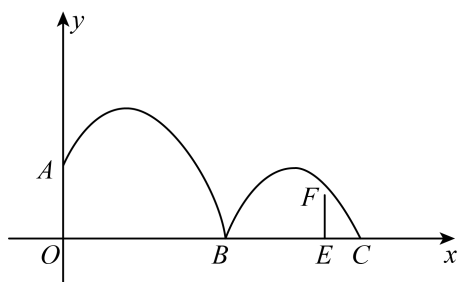


(1)求抛物线 L_1 的函数表达式，及点 B 的坐标.

(2)如图，该运动员从点 B 入水后，经过最低点 C ，再从点 D 出水，运动路线为另一条抛物线 L_2 . 若抛物线 L_1 与 L_2 开口大小相同，且 $BD = BE$ ，求最低点 C 离水面的距离.

8. 【情境探究】小明和小强做弹力球游戏. 游戏规则如下：小明抛出弹力球，弹力球落地后弹起再落下，小强在某个位置放置一块接球板，若弹力球在第二次落地前碰到接球板则小强胜（球与接球板触碰），否则小明胜.

【数学建模】弹力球两次运动轨迹均可近似看成抛物线，如图所示. 一次游戏过程中：小明站在起点 O 处抛弹力球，以 O 为坐标原点，水平方向直线和竖直方向直线分别为 x 轴和 y 轴建立平面直角坐标系，弹力球从离地面 2 米的 A 处抛出，第一次落地前，球在距离起点 O 水平距离为 2m 处，达到飞行最大高度为 3.6m，弹力球在 B 处落地后再次弹起，第二次飞行的水平距离 $BC = 4$ 米，且飞行的最大高度为第一次的一半.



【问题解决】

(1)求弹力球第一次着地前抛物线的函数表达式；

(2)小强在距起点 8 米处放置接球板 EF ， EF 垂直地面于点 E ，且 $EF=1$ m，请通过计算判断谁会获胜.

《二次函数解答题分类 1 求目标点横纵/比大小》参考答案

1. (1) $y = -\frac{1}{32}x^2 + 8$

(2) 照明灯的水平距离 PQ 的长度 $(16+16\sqrt{2})$ 米

【分析】 本题考查了二次函数的实际应用，正确理解题意，求出函数解析式是解题的关键.

(1) 设桥洞 L_1 所在抛物线的函数表达式为 $y = ax^2 + c$ ，由题意得： $AB = 32, AO = BO, C(0, 8)$,

$B(16, 0)$ ，再运用待定系数法求函数解析式；

(2) 先求出 L_2 函数表达式为 $y = -\frac{1}{32}(x-16-8\sqrt{2})^2 + 4$ ，当照明灯的高度都是 2 米时，则 $-\frac{1}{32}(x-16-8\sqrt{2})^2 + 4 = 2$ ，解得： $x_1 = 8+8\sqrt{2}$ ， $x_2 = 24+8\sqrt{2}$ (舍)，由于桥洞 L_2, L_3 关于 y 轴对称，则 $PQ = 2 \times (8+8\sqrt{2}) = 16+16\sqrt{2}$ (米).

【详解】 (1) 解：设桥洞 L_1 所在抛物线的函数表达式为 $y = ax^2 + c$ ，

由题意得： $AB = 32, AO = BO, C(0, 8)$

$\therefore B(16, 0)$,

将 $B(16, 0), C(0, 8)$ 代入 $y = ax^2 + c$

得：
$$\begin{cases} 256a + c = 0 \\ c = 8 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} a = -\frac{1}{32} \\ c = 8 \end{cases},$$

$\therefore$ 桥洞 L_1 所在抛物线的函数表达式为： $y = -\frac{1}{32}x^2 + 8$;

(2) 解： $\because$ 三个桥洞 L_1, L_2, L_3 均呈抛物线型且抛物线形状相同，桥洞 L_2, L_3 关于 y 轴对称，且最大高度均为 4 米，

$\therefore$ 设 L_2 函数表达式为： $y = -\frac{1}{32}(x-h)^2 + 4$,

将 $B(16, 0)$ 代入得： $-\frac{1}{32}(16-h)^2 + 4 = 0$,

解得： $h_1 = 16+8\sqrt{2}$ ， $h_2 = 16-8\sqrt{2}$ (舍)，

$\therefore L_2$ 函数表达式为： $y = -\frac{1}{32}(x-16-8\sqrt{2})^2 + 4$,

当照明灯的高度都是 2 米时, 则 $-\frac{1}{32}(x-16-8\sqrt{2})^2+4=2$,

解得: $x_1=8+8\sqrt{2}$, $x_2=24+8\sqrt{2}$ (舍),

$\therefore$ 桥洞 L_2, L_3 关于 y 轴对称,

$\therefore PQ=2\times(8+8\sqrt{2})=16+16\sqrt{2}$ (米),

答: 照明灯的水平距离 PQ 的长度 $(16+16\sqrt{2})$ 米.

2. (1) $y=-\frac{1}{5}(x-2.5)^2+3.5$

(2)

乙能碰到篮球, 理由如下,

当 $x=1$ 时,

$$y=-\frac{1}{5}(1-2.5)^2+3.5=3.05,$$

$\therefore 3.05 < 3.2$,

$\therefore$ 乙能碰到篮球;

【分析】 本题主要考查了二次函数的应用, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

(1) 设抛物线解析式为 $y=a(x-2.5)^2+3.5$, 把 $(4, 3.05)$ 代入解析式即可得解;

(2) 当 $x=1$ 时, 得 $y=-\frac{1}{5}(1-2.5)^2+3.5=3.05$, 与 3.2 米比较, 可得求解.

【详解】 (1) 解: 设抛物线解析式为 $y=a(x-2.5)^2+3.5$, 把 $(4, 3.05)$ 代入解析式得

$$a(4-2.5)^2+3.5=3.05,$$

解得 $a=-\frac{1}{5}$.

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=-\frac{1}{5}(x-2.5)^2+3.5$;

(2) 解: 略.

3. (1) $y=-\frac{2}{9}(x-7)^2+8$

(2) 14m

【分析】 本题考查了二次函数的应用, 待定系数法求二次函数解析式, 根据题意求得函数解析式是解题的关键.

(1) 由题意可知顶点坐标为 $P(7, 8)$, 故利用二次函数的顶点式, 设抛物线的函数表达式为

$y = a(x-7)^2 + 8$, 将 $A(1,0)$ 代入, 即可求解.

(2) 令 $y = 6$, 解一元二次方程, 求得点 $M(-10,6)$, $N(4,6)$, 的坐标, 进而即可求解.

【详解】(1) 由题意知 $AC = 2\text{m}$, $AB = 12\text{m}$, $A(1,0)$, $B(13,0)$, $P(7,8)$,

设隧道 L_1 所在抛物线的表达式为 $y = a(x-7)^2 + 8$,

将 $A(1,0)$ 代入, 得 $0 = a \times (1-7)^2 + 8$,

解得 $a = -\frac{2}{9}$,

$\therefore L_1$ 所在抛物线的表达式为 $y = -\frac{2}{9}(x-7)^2 + 8$.

(2) $\because L_1$ 所在抛物线的表达式为 $y = -\frac{2}{9}(x-7)^2 + 8$.

令 $y = 6$, 则 $-\frac{2}{9}(x-7)^2 + 8 = 6$,

解得: $x_1 = 10$, $x_2 = 4$,

$\because N$ 在抛物线对称轴左侧,

$\therefore N(4,6)$,

$\because L_1$ 所在抛物线与 L_2 所在抛物线关于 y 轴对称,

$\therefore L_2$ 所在抛物线的表达式为 $y = -\frac{2}{9}(x+7)^2 + 8$,

令 $y = 6$, 则 $-\frac{2}{9}(x+7)^2 + 8 = 6$,

解得 $x_1 = -10$, $x_2 = -4$,

$\because M$ 在抛物线对称轴左侧,

$\therefore M(-10,6)$,

$\therefore M, N$ 两点间的距离为 $4 - (-10) = 14(\text{m})$.

4. (1) $y = -\frac{1}{32}x^2 + 8$

(2)

根据题意, 把 $x = 4 + 0.5 + 0.5 + .05 = 5.5$ 代入解析式,

得 $y = -\frac{1}{32} \times 5.5^2 + 8 \approx 7.05$,

$\therefore 7.05 > 7$,

$\therefore$ 这辆货车能安全通过.

【分析】 本题考查了利用待定系数法确定二次函数解析式和二次函数在实际生活中的应用, 掌握待定系数法求解析式是解题的关键.

(1) 用待定系数法求出函数解析式即可;

(2) 把 $x=5$ 代入求出函数值和车的高度作比较即可解题.

【详解】 (1) 解: 由题意得: 设该抛物线的表达式为 $y = ax^2 + 8$, 又知抛物线过点 $B_1(8, 6)$, 所以 $6 = 64a + 8$,

解得 $a = -\frac{1}{32}$,

$\therefore y = -\frac{1}{32}x^2 + 8$;

(2) 略

5. (1) $C_1: y = \frac{1}{3}x^2 - 3 (-3 \leq x \leq 3)$; $C_2: y = -\frac{1}{9}x^2 + 1 (-3 \leq x \leq 3)$

(2) 水面的直径为 $2\sqrt{3}dm$

(3)

锅盖不能正常盖上, 理由如下:

当 $x = \frac{3}{2}$ 时, 抛物线 $C_1: y = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = -\frac{9}{4}$,

抛物线 $C_2: y = -\frac{1}{9} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{4}$,

而 $\frac{3}{4} - \left(-\frac{9}{4}\right) = 3 < 3.2$,

$\therefore$ 锅盖不能正常盖上.

【分析】 (1) 已知 A 、 B 、 C 、 D 四点坐标, 利用待定系数法即可确定两函数的解析式;

(2) 炒菜锅里的水位高度为 $1dm$, 即 $y = -2$, 列方程求得 x 的值即可得答案;

(3) 底面直径为 $3dm$ 、高度为 $3.2dm$ 圆柱形器皿能否放入锅内, 需判断当 $x = \frac{3}{2}$ 时, C_1 、 C_2 中的 y 值的差与 3.2 比较大小, 从而可得答案.

【详解】 (1) 由于抛物线 C_1 、 C_2 都过点 $A(-3, 0)$ 、 $B(3, 0)$, 设 C_1 、 C_2 的解析式为:

$y = a_1(x-3)(x+3)$, $y = a_2(x-3)(x+3)$;

抛物线 C_1 还经过 $D(0, -3)$,

则有: $-3 = a_1(0-3)(0+3)$, 解得: $a_1 = \frac{1}{3}$

即: 抛物线 $C_1: y = \frac{1}{3}x^2 - 3(-3 \leq x \leq 3)$;

抛物线 C_2 还经过 $C(0, 1)$,

则有: $1 = a_2(0-3)(0+3)$, 解得: $a_2 = -\frac{1}{9}$

即: 抛物线 $C_2: y = -\frac{1}{9}x^2 + 1(-3 \leq x \leq 3)$.

(2) 当炒菜锅里的水位高度为 1dm 时, $y = -2$, 即 $\frac{1}{3}x^2 - 3 = -2$,

解得: $x = \pm\sqrt{3}$,

$\therefore$ 此时水面的直径为 $2\sqrt{3}\text{dm}$.

(3) 略

【点睛】考查了二次函数的综合应用, 考查了待定系数法求二次函数解析式, 二次函数图象上点的坐标特征等, 注意数形结合思想在解题中的应用.

6. (1) $y = -0.005(x-80)^2 + 50$

(2) 乒乓球再次落下时仍落在球桌上

【分析】本题考查待定系数法求二次函数解析式, 已知函数值求自变量值.

(1) 根据题意将 $(0, 18)$ 代入函数解析式即可得到 $a = -0.005$, 再回代函数即可得到本题答案;

(2) 根据题意将 $(180, 0)$ 代入 $y = -0.005(x-h_2)^2 + 8(h_2 > 180)$ 中求得 h_2 的值, 再令 $y = 0$ 求出 x 的值与桌面总长比较即可.

【详解】(1) 解: $\because$ 乒乓球离桌面竖直高度的最大值为 50cm ,

$\therefore$ 设: $y = a(x-80)^2 + 50(a < 0)$, 将 $(0, 18)$ 代入,

即: $6400a + 50 = 18$, 解得 $a = -0.005$,

$\therefore y = -0.005(x-80)^2 + 50$,

故答案为: $y = -0.005(x-80)^2 + 50$;

(2) 解: 乒乓球再次落下时仍落在球桌上, 理由如下:

$\because$ 由 (1) 得

∴ 离桌面的竖直高度 y 与离球桌边缘的水平距离 x 近似满足函数关系

$$y = -0.005(x - h_2)^2 + 8 (h_2 > 180),$$

∴ 将 $(180, 0)$ 代入 $y = -0.005(x - h_2)^2 + 8$ 中,

即: $-0.005(180 - h_2)^2 + 8 = 0$, 解得: $h_2 = 140$ (舍去) 或 $h_2 = 220$,

∴ 乒乓球第一次落在球桌后弹起, 他的竖直高度 y 与水平距离 x 近似满足函数关系

$$y = -0.005(x - 220)^2 + 8,$$

∴ 令 $y = 0$, 即 $0 = -0.005(x - 220)^2 + 8$, 解得: $x = 260$ 或 $x = 180$ (舍去),

∴ $260 < 274$,

∴ 乒乓球再次落下时仍落在球桌上,

故答案为: 乒乓球再次落下时仍落在球桌上.

7. (1) 抛物线 L_1 的函数表达式为 $y = -\frac{5}{4}(x-1)^2 + \frac{5}{4}$, 点 B 的坐标为 $(4, -10)$

(2) 最低点 C 离水面的距离 $\frac{605}{64}$ m

【分析】本题考查了二次函数的应用, 熟练掌握二次函数的性质, 正确求出二次函数的解析式是解此题的关键.

(1) 由题意可设抛物线 L_1 的函数表达式为 $y = a(x-1)^2 + \frac{5}{4}$, 利用待定系数法求解即可得出抛物线解析式, 令 $y = -10$, 则 $-\frac{5}{4}(x-1)^2 + \frac{5}{4} = -10$, 求出 x 的值即可得出点 B 的坐标;

(2) 求出 $D\left(\frac{19}{2}, -10\right)$, 设抛物线 L_2 的解析式为 $y = \frac{5}{4}x^2 + bx + c$, 待定系数法求出抛物线 L_2 的解析式为 $y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{135}{8}x + \frac{75}{2}$, 再化为顶点式即可得出答案.

【详解】(1) 解: 由题意可设抛物线 L_1 的函数表达式为 $y = a(x-1)^2 + \frac{5}{4}$,

将 $(0, 0)$ 代入抛物线 L_1 的函数表达式得: $a \times 1 + \frac{5}{4} = 0$,

解得: $a = -\frac{5}{4}$,

∴ 抛物线 L_1 的函数表达式为 $y = -\frac{5}{4}(x-1)^2 + \frac{5}{4}$,

令 $y = -10$, 则 $-\frac{5}{4}(x-1)^2 + \frac{5}{4} = -10$,

解得: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$ (舍去),

∴ 点 B 的坐标为 $(4, -10)$;

(2) 解: 由 (1) 得: 点 B 的坐标为 $(4, -10)$, 抛物线 L_1 的函数表达式为 $y = -\frac{5}{4}(x-1)^2 + \frac{5}{4}$,

$$\therefore BE = 4 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{2},$$

$$\therefore BD = BE = \frac{11}{2},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的横坐标为 } \frac{11}{2} + 4 = \frac{19}{2}, \text{ 即 } D\left(\frac{19}{2}, -10\right),$$

∵ 抛物线 L_1 与 L_2 开口大小相同,

∴ 设抛物线 L_2 的解析式为 $y = \frac{5}{4}x^2 + bx + c$,

$$\text{将 } D\left(\frac{19}{2}, -10\right), B(4, -10) \text{ 代入解析式得: } \begin{cases} \frac{5}{4} \times \left(\frac{19}{2}\right)^2 + \frac{19}{2}b + c = -10 \\ \frac{5}{4} \times 4^2 + 4b + c = -10 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = -\frac{135}{8} \\ c = \frac{75}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线 } L_2 \text{ 的解析式为 } y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{135}{8}x + \frac{75}{2},$$

$$\because y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{135}{8}x + \frac{75}{2} = \frac{5}{4}\left(x^2 - \frac{27}{2}x\right) + \frac{75}{2} = \frac{5}{4}\left(x - \frac{27}{4}\right)^2 - \frac{1245}{64},$$

$$\therefore C\left(\frac{27}{4}, -\frac{1245}{64}\right),$$

$$\frac{1245}{64} - 10 = \frac{605}{64}$$

∴ 最低点 C 离水面的距离 $\frac{605}{64}$ m.

$$8. (1) y = -0.4(x-2)^2 + 3.6;$$

(2) 小明获胜, 理由:

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } 0 = -0.4(x-2)^2 + 3.6, \text{ 解得: } x_1 = 5, x_2 = -1,$$

$$\therefore B(5, 0),$$

∵ $BC = 4$, 且飞行的最大高度为第一次的一半.

$$\therefore \text{设弹力球第二次着地前抛物线的函数表达式: } y = m(x-7)^2 + 1.8,$$

把 $B(5,0)$ 代入得: $0 = m(5-7)^2 + 1.8$, 解得: $m = -0.45$,

$$\therefore y = -0.45(x-7)^2 + 1.8,$$

把 $x=8$ 代入 $y = -0.45(x-7)^2 + 1.8$, 得 $y = 1.35$,

$$\because 1.35 > 1,$$

$\therefore$ 小强的接球板没有触碰到球, 小明获胜

【分析】 本题考查二次函数的实际应用, 掌握待定系数法是关键

(1) 设弹力球第一次着地前抛物线的函数表达式: $y = a(x-2)^2 + 3.6$, 利用待定系数法求解即可;

(2) 先求出 B 坐标, 再求出弹力球第二次着地前抛物线的函数表达式: $y = -0.45(x-7)^2 + 1.8$, 把 $x=8$ 代入, 求得 y 的值与 $EF=1$ 比较大小即可

【详解】 (1) 解: 由题意: 设弹力球第一次着地前抛物线的函数表达式: $y = a(x-2)^2 + 3.6$,

把 $A(0,2)$ 代入 $y = a(x-2)^2 + 3.6$, 得: $2 = a \times (0-2)^2 + 3.6$,

解得: $a = -0.4$,

$$\therefore y = -0.4(x-2)^2 + 3.6;$$

(2) 略;