

1 认识特殊的平行四边形

A 知识要点分类练

夯实基础

知识点 1 菱形、矩形、正方形的定义

1. 如图 1-1-1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, 在不添加任何辅助线的前提下:

(1) 要想四边形 $ABCD$ 成为一个菱形, 只需添加的一个条件是 _____, 依据是:

_____;

(2) 当 $\angle A =$ _____ 时, 四边形 $ABCD$ 是一个矩形. 依据是: _____;

(3) 要想四边形 $ABCD$ 成为一个正方形, 需添加条件是 _____.

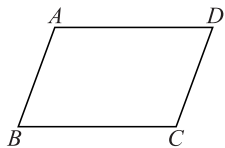


图 1-1-1

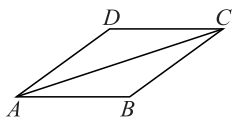


图 1-1-2

2. (教材随堂练习 T2 变式) 如图 1-1-2, AC 为菱形 $ABCD$ 的对角线, $AB = BC$, 若 $\angle D = 140^\circ$, 则 $\angle BAC$ 的度数为 ()

A. 30° B. 25° C. 20° D. 15°

3. 如图 1-1-3, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm, P 是边 AB 上一点 (不与点 A, B 重合), 连接 DP . 若 DP 平分 $\angle ADC$, 则 BP 的长为 ()

A. 1 cm B. 2 cm C. 2.5 cm D. 1.5 cm

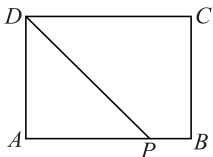


图 1-1-3

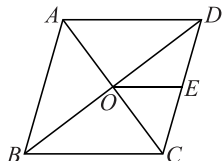


图 1-1-4

4. 如图 1-1-4, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , E 为 CD 的中点. 若 $OE = 2$, 则 BC 的长为 ()

A. 4 B. 1 C. 3 D. $4\sqrt{2}$

5. 如图 1-1-5, 在菱形 $ABCD$ 中, 连接 AC , 过点 B 作 $BO \perp AC$ 于点 O . 若 $\angle DAC = 36^\circ$, 求 $\angle OBC$ 的度数.

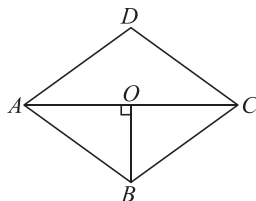


图 1-1-5

6. (2025 陕西改编) 如图 1-1-6, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在边 BC, CD 上, 且 $AB = AD, \angle BAE = \angle DAF$. 求证: $CE = CF$.

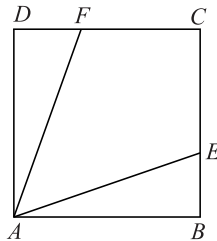


图 1-1-6

知识点 2 菱形、矩形、正方形与平行四边形的关系

7. 为了表示几种三角形之间的关系,画了如图 1-1-7 所示的结构图:

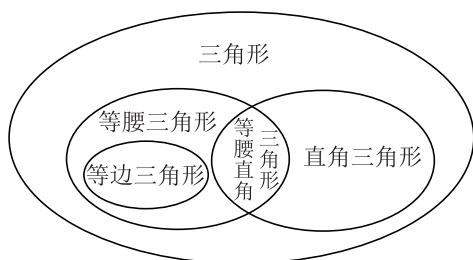


图 1-1-7

请你采用适当的方式表示正方形、平行四边形、四边形、菱形、矩形之间的关系。

知识点 3 菱形、矩形、正方形的轴对称性质

8. 菱形、矩形、正方形都是_____图形;菱形、矩形都有_____条对称轴,正方形有_____条对称轴。
9. 在平行四边形、菱形、矩形、正方形中,既是中心对称图形又是轴对称图形的有 ()
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
10. 瓷砖镶嵌是一种充满艺术美的技艺,如图 1-1-8 是放置的正方形瓷砖 $ABCD$, 它的对称轴与平面直角坐标系的坐标轴重合. 若点 A 的坐标为 $(-2, -2)$, 则点 C 的坐标可表示为_____。

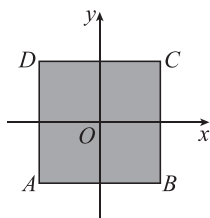


图 1-1-8

B 规律方法综合练

训练思维

11. 如图 1-1-9, 在平面直角坐标系 xOy 中, 菱形 $OABC$ 的顶点 B 在 x 轴上, 连接 AC , 交 x 轴于点 D , 若 $OB=8, AD=3$, 则点 C 的坐标为

()

- A. $(3, -4)$
B. $(-3, 4)$
C. $(4, -3)$
D. $(-4, 3)$

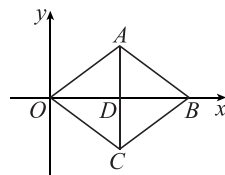


图 1-1-9

12. (教材习题 1.1T1 变式) 如图 1-1-10, 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle B = 90^\circ$, E 是 BC 的中点, $AD=AE=2$, 求 AC 的长度。

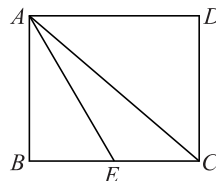


图 1-1-10

13. 如图 1-1-11, 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 E 在边 BC 上, $AD=DE$, $AF \perp DE$ 于点 F .
- (1) 求证: $AB=AF$;
- (2) 若 $AB=3, AD=5$, 求 EF 的长。

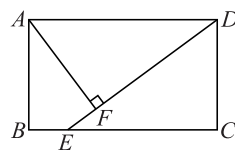


图 1-1-11

2 第1课时 菱形的性质

A 知识要点分类练

夯实基础

知识点1 菱形的边的性质

1. 若菱形的一条边长为 5 cm, 则这个菱形的周长为 ()
A. 20 cm B. 18 cm C. 16 cm D. 12 cm
2. 如图 1-2-1, 在菱形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AB, AC 的中点. 如果 $EF = 2$, 那么线段 CD 的长是_____.

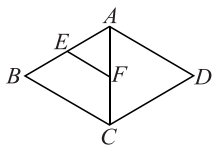


图 1-2-1

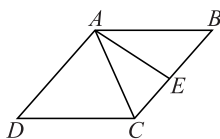


图 1-2-2

3. 如图 1-2-2, 在菱形 $ABCD$ 中, AE 平分 $\angle CAB$, 若 $\angle CAE = 32^\circ$, 则 $\angle ABC$ 的度数为_____.
4. (2025 西安未央区期末) 如图 1-2-3, 在菱形 $ABCD$ 中, 连接 BD , E, F 分别是 AB, BC 上的点, 连接 DE, DF, EF , 且 $BE = BF$. 求证: $DE = DF$.

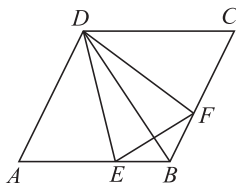


图 1-2-3

知识点2 菱形的对角线的性质

5. (教材随堂练习 T1 变式) 如图 1-2-4, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , AO 和 BO 的长分别是 4 和 3, 则边 AD 的长为 ()
A. 5 B. 6 C. 10 D. 24

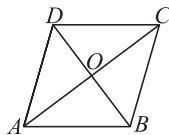


图 1-2-4

6. (2025 西安长安区期中) 如图 1-2-5, 在菱形 $ABCD$ 中, 连接 AC, BD , 相交于点 O , 若 $\angle 1 = 35^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为_____.

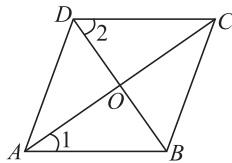


图 1-2-5

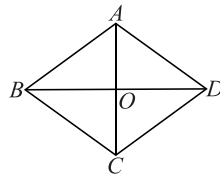


图 1-2-6

7. (教材随堂练习 T1 变式) 如图 1-2-6, 在菱形 $ABCD$ 中, AC 和 BD 相交于点 O . 若 $AB = 10, AC = 12$, 则 BD 的长为_____.
8. 如图 1-2-7, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ACD = 30^\circ, BD = 8$.
(1) $\angle DAB =$ _____ $^\circ$;
(2) 求 AC 的长.

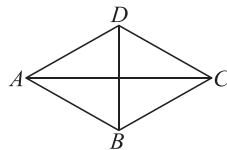


图 1-2-7

知识点3 菱形的面积

9. (2025 云南) 如图 1-2-8, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC, BD 相交于点 O . 若 $AC = 6, BD = 5$, 则菱形 $ABCD$ 的面积是_____.

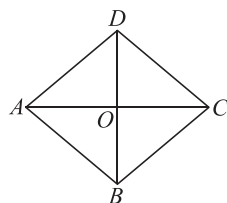


图 1-2-8

10. (教材习题 1.2T5 变式) 如图 1-2-9, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC, BD 相交于点 $O, AO = 4, BO = 3, DH \perp AB$ 于点 H , 求 DH 的长.

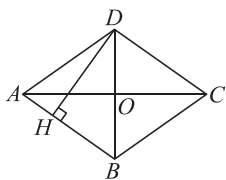


图 1-2-9

13. (2024 陕西) 如图 1-2-12, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 5, BD = 8$, 过点 A 作 $AE \perp AB$, 与 BD 相交于点 E , 连接 CE , 则四边形 $ABCE$ 的面积为 _____.

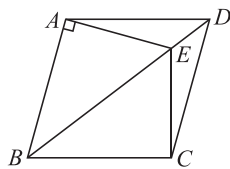


图 1-2-12

14. 如图 1-2-13, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 过点 D 作对角线 BD 的垂线, 交 BA 的延长线于点 E .
- (1) 求证: 四边形 $ACDE$ 是平行四边形;
- (2) 若 $AC = 8, BD = 6$, 求 $\triangle ADE$ 的周长.

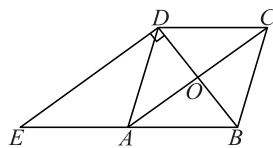


图 1-2-13

B 规律方法综合练

训练思维

11. 如图 1-2-10, O 是坐标原点, 菱形 $ABOC$ 的顶点 B 在 x 轴的负半轴上, 顶点 C 的坐标为 $(3, 4)$, 则顶点 A 的坐标为 _____.

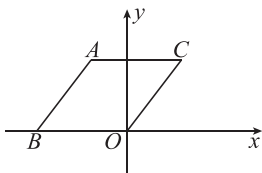
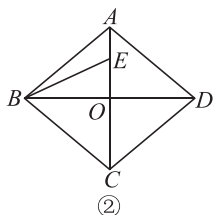


图 1-2-10

12. **新情境 中华优秀传统文化** “福”字象征着中华民族的历史文化与精神. 如图 1-2-11①是小红家大门上的“福”字, 图②是抽离出来的菱形 $ABCD$, 对角线 AC, BD 相交于点 $O, \angle ABC = 80^\circ, E$ 是线段 AO 上一点, 且 $BC = CE$, 则 $\angle OBE$ 的度数是 _____.



①



②

图 1-2-11

C 拓广探究创新练

提升素养

15. **核心素养 空间观念** 我们定义: 连接平行四边形一组对边中点的线段叫作“对边中位线”, 连接平行四边形一组邻边中点的线段叫作“邻边中位线”. 如图 1-2-14, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, 对角线 BD 的长为 8, 那么“对边中位线” EF 与“邻边中位线” EG, FG 所围成的 $\triangle EFG$ 的面积是 _____.

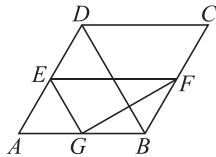


图 1-2-14

第2课时 菱形的判定

A 知识要点分类练

夯实基础

知识点1 根据定义进行菱形的判定

- 如图 1-2-15, 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 9$ cm, $BC = 4$ cm, 将 CB 沿 BA 方向平移得到 EF (点 F 在边 AB 上), 则当 $BF =$ _____ cm 时, 四边形 $DAFE$ 是菱形, 依据是 _____.
- 如图 1-2-16, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在 AB 上, $AB \parallel CD$, $AD \parallel EC$, 若 AC 平分 $\angle DAE$. 求证: 四边形 $AECD$ 是菱形.

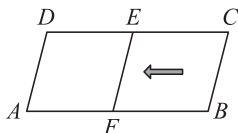


图 1-2-15

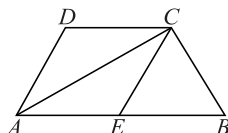


图 1-2-16

知识点2 根据对角线进行菱形的判定

- 在 $\square ABCD$ 中, AC, BD 是对角线, 补充一个条件使得四边形 $ABCD$ 为菱形, 这个条件可以是 ()
 A. $AC = BD$ B. $AB = AC$
 C. $AC \perp BD$ D. $\angle ABC = 90^\circ$
- 如图 1-2-17, 已知 $\square ABCD$, AC, BD 交于点 O , 绕点 O 旋转对角线 AC , $\angle AOD = \alpha$, 当 $\alpha =$ _____ $^\circ$ 时, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 依据是 _____.

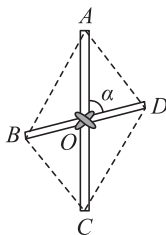


图 1-2-17

- (2024 秦都中学期中) 如图 1-2-18, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , BD 垂直平分 AC , E 是 OB 上一点, 且 $\angle AEO = \angle CDO$. 求证: 四边形 $AECD$ 是菱形.

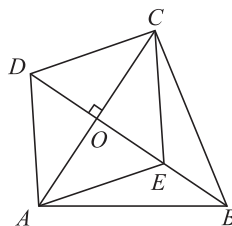


图 1-2-18

知识点3 根据边进行菱形的判定

- 新考法 动手能力** 如图 1-2-19, B, C 分别是锐角 $\angle A$ 两边上的点, $AB = AC$, 分别以点 B, C 为圆心, 以 AB 的长为半径画弧, 两弧在 $\angle A$ 内部相交于点 D , 连接 BD, CD , 则根据作图过程判定四边形 $ABDC$ 是菱形的依据是 _____.
- 如图 1-2-20, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 是 BC 边上的中线, 点 E 在 DA 的延长线上, 连接 BE , 过点 C 作 $CF \parallel BE$ 交 AD 的延长线于点 F , 连接 BF, CE . 求证: 四边形 $BECF$ 是菱形.

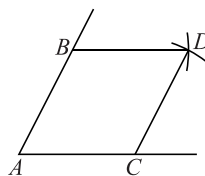


图 1-2-19

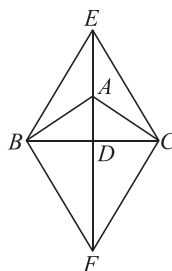


图 1-2-20

8. 如图 1-2-21, 在四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AD, BC 的中点, G, H 分别是对角线 BD, AC 的中点, 若四边形 $EGFH$ 是菱形, 则四边形 $ABCD$ 应满足的条件是 ()

- A. $AC=BD$ B. $AB=CD$
C. $AC \perp BD$ D. $AB=AD$

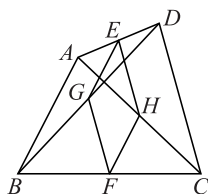


图 1-2-21



图 1-2-22

9. (教材随堂练习 T2 变式) “蓝丝带”一般指蓝丝带海洋保护协会, 同时也象征着对保护海洋的呼吁, 李老师用一段矩形绸缎制作了一条如图 1-2-22 所示的蓝丝带, 若 $\angle BAD = 45^\circ$, 重叠部分图形的面积是 $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$, 则丝带的宽为 ()

- A. 6 cm B. 12 cm
C. $6\sqrt{2} \text{ cm}$ D. $12\sqrt{2} \text{ cm}$

10. **新考法 开放性** 如图 1-2-23, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , O 是 BD 的中点, $AD \parallel BC$.

(1) 请你从以下条件: ① $AC \perp BD$, ② $AB = BC$, ③ AC 平分 $\angle BAD$, ④ $AO = BO$ 中, 选择一个使得四边形 $ABCD$ 是菱形的条件: _____ (填序号);

(2) 根据 (1) 中所选择的条件, 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形.

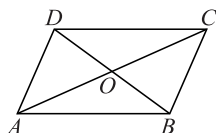


图 1-2-23

11. **核心素养 几何直观** 学习了菱形的判定和性质后, 李老师拿出一个长 $AB = 40 \text{ cm}$ 、宽 $BC = 30 \text{ cm}$ 的长方形 $ABCD$ 让同学们剪成一个面积最大的菱形并求其面积. 以下是两位同学的想法:

小明的想法是取长方形各边的中点, 连成的四边形是菱形 $EFGH$, 如图 1-2-24①, 面积

$$\text{是 } \frac{1}{2} HF \cdot EG = \frac{1}{2} \times 40 \times 30 = 600 (\text{cm}^2).$$

小刚的想法是沿长方形对角线 AC 折叠, AB 上的点 F 与 DC 上的点 E 重合, 点 B 落在点 B' 处, 展开长方形, 连接 AE, CF 得到四边形 $AFCE$, 如图②, 你能判定四边形 $AFCE$ 是菱形吗? 其面积是多少?

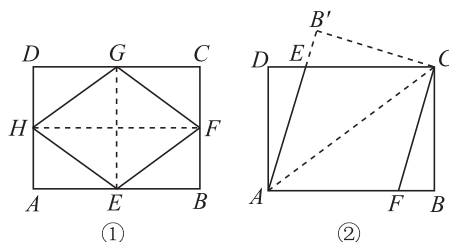


图 1-2-24

3 第1课时 矩形的性质

A 知识要点分类练

夯实基础

知识点1 矩形的角的性质

1. (2024 辽宁改编) 如图 1-3-1, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在 AD 上, 当 $\triangle EBC$ 是等边三角形时, $\angle ABE$ 的度数为 ()

A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°

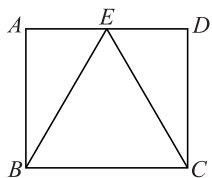


图 1-3-1

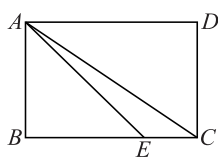


图 1-3-2

2. 如图 1-3-2, 在矩形 $ABCD$ 中, AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E , 若 $\angle CAE = 10^\circ$, 则 $\angle ACB$ 的度数为 _____.
3. (2025 吉林) 如图 1-3-3, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E, F 在边 BC 上, 连接 AE, DF , $\angle BAE = \angle CDF$.

(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle DCF$;

(2) 当 $AB = 12, DF = 13$ 时, 求 BE 的长.

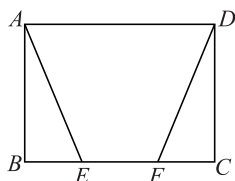


图 1-3-3

知识点2 矩形的对角线的性质

4. 下列结论中, 矩形具有而平行四边形不一定具有的性质是 ()

A. 对边平行且相等 B. 对角线互相平分
C. 对角线相等 D. 对角相等

5. (2025 甘孜州) 如图 1-3-4, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , $\angle AOB = 60^\circ, AB = 4$, 则 AC 的长为 _____.

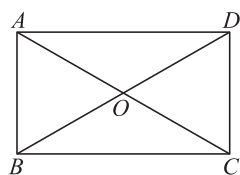


图 1-3-4

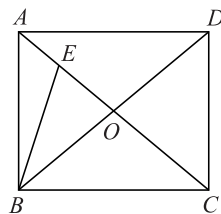


图 1-3-5

6. (2025 榆林横山区期末) 如图 1-3-5, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于点 O , 点 E 在 AC 上, 连接 BE , $\triangle BCE$ 是等腰三角形, $CE = CB$. 若 $AB = 6, BD = 10$, 则 AE 的长为 _____.

7. 如图 1-3-6, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 过点 D 作 AC 的平行线, 交 BC 的延长线于点 E . 求证: $BD = DE$.

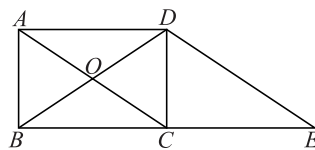


图 1-3-6

知识点 3 直角三角形斜边上的中线的性质

8. 如图 1-3-7, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, O 是边 AB 的中点, 若 $CO = 7$ cm, 则 AB 的长为 ()

A. 12 cm

B. 13 cm

C. 14 cm

D. 15 cm

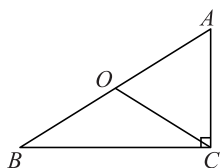


图 1-3-7

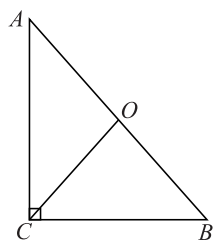


图 1-3-8

9. 如图 1-3-8, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CO 为 AB 边上的中线. 若 $\angle B = 50^\circ$, 则 $\angle OCA$ 的度数为 _____.

B 规律方法综合练

训练思维

10. 如图 1-3-9, 将矩形 $ABCD$ 沿直线 BD 折叠, 使点 C 落在点 C' 处, BC' 交 AD 于点 E , 若 $AD = 8$, $AB = 4$, 则 DE 的长为 ()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

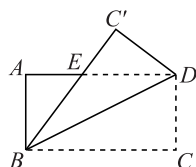


图 1-3-9

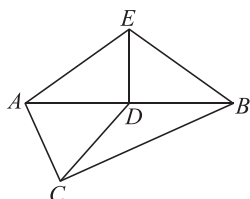


图 1-3-10

11. (2025 西安经开区一模) 如图 1-3-10, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, CD 为斜边 AB 上的中线, E 是 AB 上方一点, 且 $AE = BE$, 连接 DE , 若 $CD = 3$, $AE = 7$, 则 DE 的长为 ()

A. $2\sqrt{5}$

B. $2\sqrt{10}$

C. 4

D. $4\sqrt{2}$

12. 如图 1-3-11, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 且 $BA = 5$, $AC = 12$, 四边

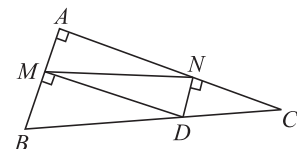


图 1-3-11

形 $AMDN$ 为矩形, D 是斜边 BC 上的一个动点, M, N 分别在 AB, AC 上, 连接 MN , 则线段 MN 的最小值为 _____.

13. 如图 1-3-12, E, F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AB, AD 上的点, $\angle FEC = \angle FCE = 45^\circ$.

(1) 求证: $AF = CD$;

(2) 若 $AD = 2$, $\triangle EFC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 求线段 BE 的长.

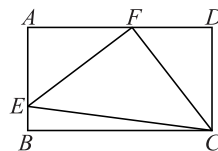


图 1-3-12

C 拓广探究创新练

提升素养

14. 如图 1-3-13, 矩形 $ABCD$ 中, E 为边 AB 上任意一点, 连接 CE , F 为 CE 的中点, 过点 F 作 $MN \perp CE$, MN 与 AB, CD 分别相交于点 M, N , 连接 CM, EN .

(1) 求证: 四边形 $CNEM$ 为菱形;

(2) 若 $AB = 10$, $AD = 4$, 当 $AE = 2$ 时, 求 EM 的长.

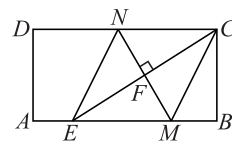


图 1-3-13

第2课时 矩形的判定

A 知识要点分类练

夯实基础

知识点1 根据定义进行矩形的判定

1. 如图 1-3-14, 已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC (不含点 B, C) 上的一点, $DE \parallel AB$ 交 AC 于点 E , $DF \parallel AC$ 交 AB 于点 F . 要使四边形 $AFDE$ 是矩形, 则在

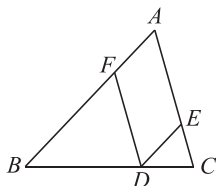


图 1-3-14

$\triangle ABC$ 中要增加的一个条件是_____.
判定矩形的依据是_____.

2. (2025 北京节选) 如图 1-3-15, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为 AB, AC 的中点, $DF \perp BC$, 垂足为 F , 点 G 在 DE 的延长线上, $DG = FC$. 求证: 四边形 $DFCG$ 是矩形.

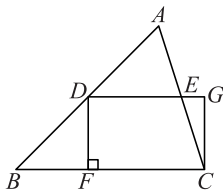


图 1-3-15

知识点2 根据对角线进行矩形的判定

3. (2024 西安交大附中期中) 如图 1-3-16, 要使平行四边形 $ABCD$ 成为矩形, 需要添加的条件是 ()

- A. $\angle ABD = \angle CBD$ B. $AC = BD$
C. $AC \perp BD$ D. $AB = BC$

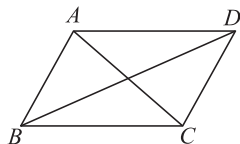


图 1-3-16

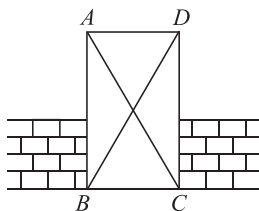


图 1-3-17

4. 如图 1-3-17, 工人师傅砌门时, 要想检验门框 $ABCD$ 是否符合设计要求 (即门框是不是矩形), 在确保两组对边分别相等的前提下,

只要测量出对角线 AC, BD 的长度, 然后看它们是否相等就可以判断了, 这种做法的根据是_____.

5. (教材例 2 变式) 如图 1-3-18, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 对角线 AC, BD 相交于点 O , $\triangle OAB$ 为等边三角形, $BC = \sqrt{3}$. 求四边形 $ABCD$ 的周长.

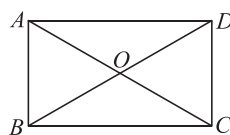


图 1-3-18

知识点3 根据角进行矩形的判定

6. 判断一个四边形门框是不是矩形, 下面方案正确的是 ()

- A. 测量对角线是否相互平分
B. 测量两组对边是否分别相等
C. 测量一组对角是否都为直角
D. 测量四边形其中的三个角是否都为直角

7. 如图 1-3-19, 在 $\square ABCD$ 中, $DE \perp AB$, $BF \perp CD$, 垂足分别为 E, F . 求证: 四边形 $BFDE$ 为矩形.

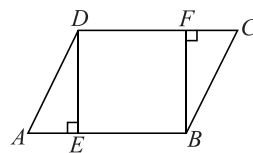


图 1-3-19

8. 如图 1-3-20, 将平行四边形 $ABCD$ 的边 DC 延长, 使 $CE = DC$, 连接 AE , 交 BC 于点 F . 添加一个条件, 使四边形 $ABEC$ 是矩形. 有下列四个条件: ① $\angle DAC = \angle EAC$; ② $AD = AE$; ③ $AB = AD$; ④ $\angle AFC = 2\angle ABC$. 你认为可选择的是_____. (填所有满足条件的序号)

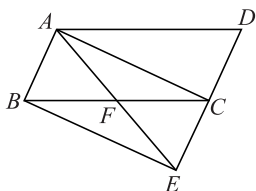


图 1-3-20

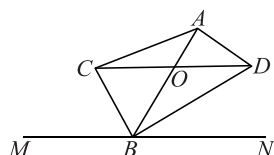


图 1-3-21

9. (教材习题 1.3T5 变式) 如图 1-3-21, 线段 AB 的端点 B 在直线 MN 上, 过线段 AB 上的一点 O 作 MN 的平行线, 分别交 $\angle ABM$ 和 $\angle ABN$ 的平分线于点 C, D , 连接 AC, AD . 添加一个适当的条件: 当_____时, 四边形 $ACBD$ 为矩形.
10. (2025 西工大附中月考) 中国古代数学家刘徽在《九章算术注》中, 给出了证明三角形面积公式的出入相补法. 如图 1-3-22 所示, 在

$\triangle ABC$ 中, 分别取 AB, AC 的中点 D, E , 连接 DE , 过点 A 作 $AF \perp DE$, 垂足为 F , 延长 FD 至点 G , 使得 $DG = DF$, 延长 FE 至点 H , 使得 $EH = EF$, 连接 BG, CH .

- (1) 求证: 四边形 $BCHG$ 是矩形;
(2) 若 $DE = 6, AF = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

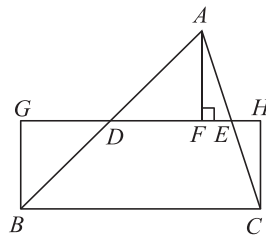


图 1-3-22

题组专练 含 60° 角的特殊平行四边形

方法指引

- (1) 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, 则有等边三角形 ABC , 如图 1-3-23①;
(2) 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle AOB = 60^\circ$, 则有等边三角形 AOB , 如图②.

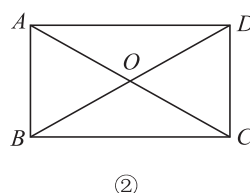
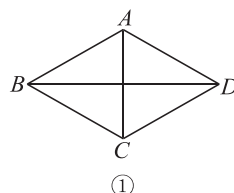


图 1-3-23

1. 如图 1-3-24, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 120^\circ$. 已知 $\triangle ABC$ 的周长是 12, 则菱形 $ABCD$ 的周长是 ()
2. (2025 绥化) 一个矩形的一条对角线长为 10, 两条对角线的一个交角为 60° . 则这个矩形的面积是 ()
A. 25 B. $25\sqrt{3}$ C. $25\sqrt{5}$ D. $50\sqrt{3}$
4. 如图 1-3-25, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 过点 O 作 $OE \perp AD$ 于点 E , $OE = 2, \angle BAO = 60^\circ$, 则 BD 的长为_____.

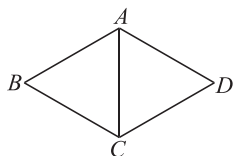


图 1-3-24

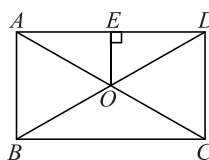


图 1-3-25

4 第1课时 正方形的性质

A 知识要点分类练

夯实基础

知识点 正方形的性质

1. 正方形具有而矩形不一定具有的性质是

()

- A. 四个角都为直角
- B. 对角线互相平分
- C. 对角线相等
- D. 对角线互相垂直

2. 如图 1-4-1, 正方形 $ABCD$ 中, $AB=1$, 则 AC 的长是

()

- A. 1
- B. $\sqrt{2}$
- C. $\sqrt{3}$
- D. 2

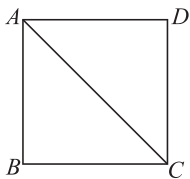


图 1-4-1

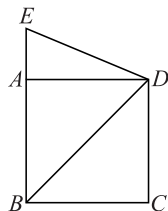


图 1-4-2

3. 如图 1-4-2, 在正方形 $ABCD$ 中, 在 BA 延长线上取一点 E , 使 $BE = BD$, 连接 DE , 则 $\angle EDA$ 的度数为

()

- A. 10°
- B. 15°
- C. 30°
- D. 22.5°

4. 如图 1-4-3, 在正方形 $ABCD$ 的外侧作等边三角形 ADE , 则 $\angle AEB$ 的度数为

()

- A. 10°
- B. 12.5°
- C. 15°
- D. 20°

5. 若正方形的一条对角线长为 4, 则这个正方形的面积是

()

- A. 8
- B. $4\sqrt{2}$
- C. $8\sqrt{2}$
- D. 16

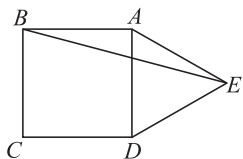


图 1-4-3

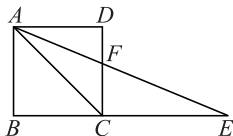


图 1-4-4

6. 如图 1-4-4, 在正方形 $ABCD$ 中, 延长 BC 到点 E , 使 $CE = AC$, 连接 AE 交 CD 于点 F , 则 $\angle AFC$ 的度数为

()

- A. 112.5°
- B. 120°
- C. 125°
- D. 135°

7. (教材随堂练习 T1 变式) 如图 1-4-5, 在正方形 $ABCD$ 中, F 为对角线 AC 上一点, 连接 BF, DF . 如果 $\angle DFB = 140^\circ$, 那么 $\angle ADF =$ _____ $^\circ$.

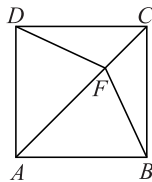


图 1-4-5

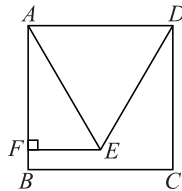


图 1-4-6

8. (2024 兰州) 如图 1-4-6, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\triangle ADE$ 为等边三角形, $EF \perp AB$ 于点 F . 若 $AD = 4$, 则 EF 的长为 _____.

9. 如图 1-4-7, 正方形 $ABCD$ 中, 点 G 在 BC 上, $DE \perp AG$ 于点 E , $BF \parallel DE$, 交 AG 于点 F . 求证: $AE = BF$.

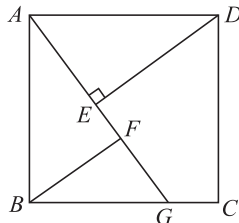


图 1-4-7

10. (教材习题 1.4T2 变式) 如图 1-4-8, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\triangle EBC$ 是等边三角形.

(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle DCE$;

(2) 求 $\angle AED$ 的度数.

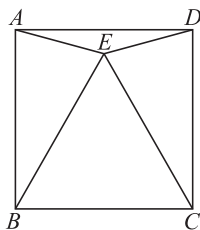


图 1-4-8

11. 如图 1-4-9, 在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 交于点 O , 点 E, F 分别在边 CD, BC 上, 且 $CE = BF$, 连接 OE, OF .

(1) 求证: $OE = OF$;

(2) 若正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 求四边形 $OECF$ 的面积.

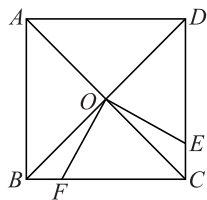


图 1-4-9

14. 如图 1-4-12, 在正方形 $ABCD$ 中, $CD = 4$, E, F 分别是边 CD, BC 上的动点, 且 $DE = CF$, AE 与 DF 交于点 P , 则线段 CP 长的最小值为_____.

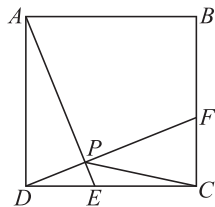


图 1-4-12

15. 如图 1-4-13, 在正方形 $ABCD$ 的右侧作等边三角形 ABE , 连接 DE , AC 交于点 F , 连接 BF . 求证:

(1) $\triangle BAF \cong \triangle DAF$;

(2) $\angle AFE = 60^\circ$.

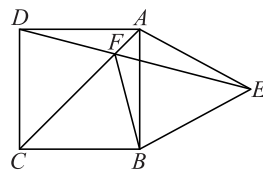


图 1-4-13

B 规律方法综合练

训练思维

12. (2026 西工大附中一模) 如图 1-4-10, 在正方形 $ABCD$ 中, F 为对角线 BD 上一点, 连接 AF 并延长交 CD 于点 E , 连接 CF , 若 $EF = EC$, 则 $\angle ECF$ 的度数为 ()

A. 36° B. 32° C. 30° D. 28°

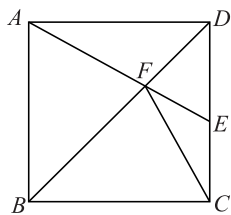


图 1-4-10

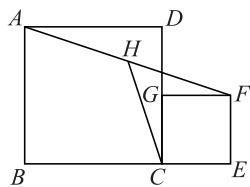


图 1-4-11

13. (2025 西安新城期末) 如图 1-4-11, 在正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中, 点 G 在 CD 上, $BC = 4$, $CE = 2$, 连接 AF , H 是 AF 的中点, 连接 CH , 那么 CH 的长为 ()

A. $\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{10}$
C. $3\sqrt{7}$ D. $\sqrt{7}$

C 拓广探究创新练

提升素养

16. (教材尝试·交流改编) 如图 1-4-14, 在平面直角坐标系中有一个正方形 $ABCD$, 边长为 6, 顶点 D 的坐标为 $(3, 3)$. 在正方形的边 AB, BC, CD, AD 上各有一点 M, P, N, Q , 顺次连接 M, P, N, Q 四点所得四边形 $MPNQ$ 为矩形. 若点 M 的坐标为 $(-3, 2)$, 点 N 的坐标为 $(3, -2)$, 则点 P 和点 Q 的坐标分别为_____.

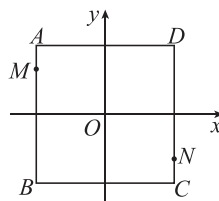


图 1-4-14

第2课时 正方形的判定

A 知识要点分类练

夯实基础

知识点1 根据正方形的定义进行正方形的判定

1. 已知在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle C = 90^\circ$, 若使四边形 $ABCD$ 是正方形, 则还需加上一个条件: _____ (填一个即可).

知识点2 根据菱形进行正方形的判定

2. 小明用四根长度相同的木条制作了能够活动的菱形学具, 他先将学具调整为图 1-4-15①所示的菱形, 并测得 $\angle B = 60^\circ$, 接着调整学具, 当 $\angle B =$ _____ $^\circ$ 时, 学具成为图②所示的正方形.

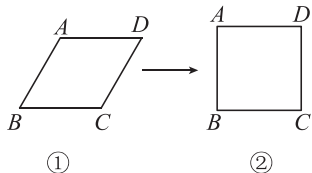


图 1-4-15

3. (2024 黑龙江) 如图 1-4-16, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 请添加一个条件: _____, 使得菱形 $ABCD$ 为正方形.

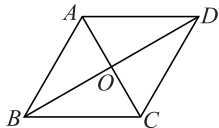


图 1-4-16

4. 如图 1-4-17, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = CD = DA$, 要使四边形 $ABCD$ 是正方形, 则添加的一个条件是 _____.

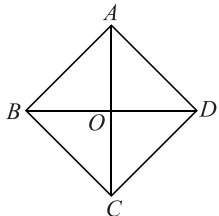


图 1-4-17

知识点3 根据矩形进行正方形的判定

5. 如图 1-4-18, 将矩形纸片 $ABCD$ 折叠, 使点 A 落在 BC 上的点 F 处, 折痕为 BE . 若沿 EF

剪开, 将折叠部分展开得到的四边形 $ABFE$ 是一个正方形, 其数学原理是 ()

- A. 有一组邻边相等的矩形是正方形
B. 对角线相等的菱形是正方形
C. 两个全等的直角三角形构成正方形
D. 轴对称图形是正方形

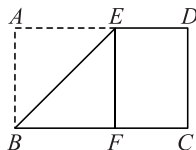


图 1-4-18

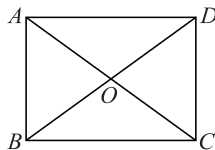


图 1-4-19

6. 如图 1-4-19, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 试添加一个条件: _____, 使得矩形 $ABCD$ 为正方形.
7. (教材习题 1.4T3 变式) 如图 1-4-20, 在 $\square ABCD$ 中, $AB \perp BC$, E, F 是对角线 BD 上的两点, 连接 AE, CE, AF, CF , 构成的四边形 $AECF$ 是一个菱形. 求证: $\square ABCD$ 是正方形.

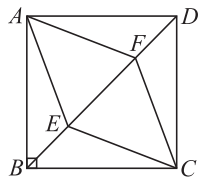


图 1-4-20

知识点 4 中点四边形

8. 顺次连接正方形各边中点所得的四边形是 ()

A. 等腰梯形 B. 正方形
C. 菱形 D. 矩形

9. 如图 1-4-21, E, F, G, H 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 的中点, 则下列说法不正确的是 ()

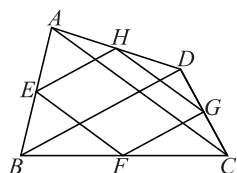


图 1-4-21

- A. 若 $AC \perp BD$, 则四边形 $EFGH$ 为矩形
B. 若 $AC = BD$, 则四边形 $EFGH$ 为菱形
C. 若四边形 $EFGH$ 是平行四边形, 则 AC 与 BD 互相平分
D. 若四边形 $EFGH$ 是正方形, 则 AC 与 BD 互相垂直且相等

B 规律方法综合练

训练思维

10. 小明在学习了正方形之后, 给同桌小文出了道题, 从下列四个条件: ① $AB = BC$, ② $\angle ABC = 90^\circ$, ③ $AC = BD$, ④ $AC \perp BD$ 中选两个作为补充条件, 使 $\square ABCD$ (如图 1-4-22) 为正方形, 现有下列四种选法, 你认为错误的是 ()

A. ①② B. ②③
C. ①③ D. ②④

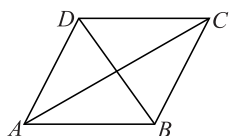


图 1-4-22

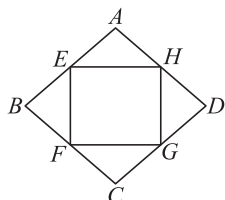


图 1-4-23

11. (2025 广州) 如图 1-4-23, 菱形 $ABCD$ 的面积为 10, E, F, G, H 分别为 AB, BC, CD, DA 的中点, 则四边形 $EFGH$ 的面积为 ()

A. $\frac{5}{2}$ B. 5 C. 4 D. 8

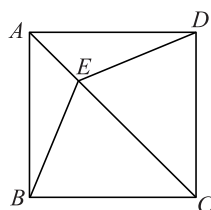
12. 如图 1-4-24①, 四边形 $ABCD$ 为正方形, E 为对角线 AC 上一点, 连接 DE, BE .

(1) 求证: $BE = DE$.

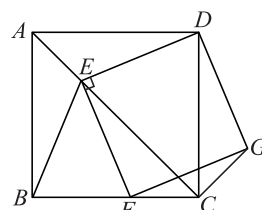
(2) 如图②, 过点 E 作 $EF \perp DE$, 交边 BC 于点 F , 以 DE, EF 为邻边作矩形 $DEFG$, 连接 CG .

① 求证: 矩形 $DEFG$ 是正方形;

② 若正方形 $ABCD$ 的边长为 9, $CG = 3\sqrt{2}$, 求正方形 $DEFG$ 的边长.



①



②

图 1-4-24

专题训练(一) 与正方形有关的常考模型

► 模型一 正方形中的“十字架”模型

方法点睛

正方形内,分别连接两组对边上任意两点,得到的两条线段(如图 1-ZT-1①中的线段 AF 与 BE ,图②中的线段 AF 与 EG ,图③中的线段 HF 与 EG)满足:若两条线段垂直,则这两条线段相等.

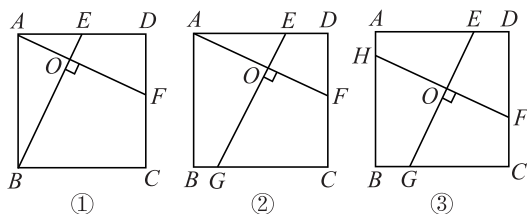


图 1-ZT-1

- 如图 1-ZT-2,正方形 $ABCD$ 中,点 M, N 分别在 AB, BC 上,且 $BM = CN$, AN 与 DM 相交于点 P .

(1)求证: $\triangle ABN \cong \triangle DAM$;

(2)求 $\angle APM$ 的大小.

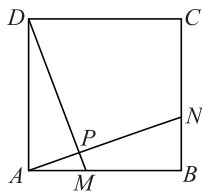


图 1-ZT-2

变式 如图 1-ZT-3,若将正方形 $ABCD$ 折叠,使得点 B 的对应点 F 落在 CD 边上,折痕 MN 分别交 AD, BC 于点 M, N .若正方形的边长为 12, $MN = 13$,则 $CF =$ _____.

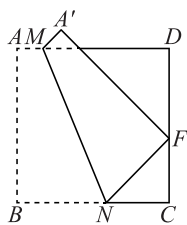


图 1-ZT-3

► 模型二 正方形中过对角线交点的直角模型

方法点睛

如图 1-ZT-4,在正方形 $ABCD$ 中, O 为对角线的交点,直角 $\angle EOF$ 绕点 O 顺时针旋转,若 OE, OF 分别与 DA, AB 的延长线交于点 G, H ,则 $\triangle AGO \cong \triangle BHO$, $\triangle OGH$ 是等腰直角三角形.

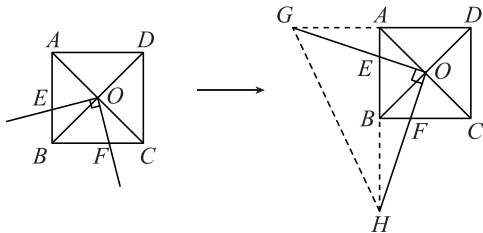


图 1-ZT-4

- 如图 1-ZT-5,正方形 $ABCD$ 中, O 为对角线 AC 的中点, P 为平面内一点,且 $BP \perp CP$.过点 O 作 $OE \perp OP$ 交 PB 的延长线于点 E .探究 BE 与 PC 之间的数量关系,并说明理由.

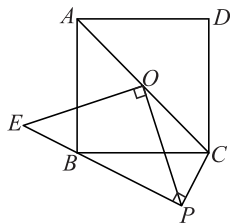


图 1-ZT-5

变式 如图 1-ZT-6,在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, O 是 AB 的中点,且 $AC = 1$,将一块三角尺的直角顶点放在点 O 处,始终保持该三角尺的两直角边分别与 AC, BC 相交,交点分别为 D, E ,则这两个三角形重叠部分的面积为 _____.

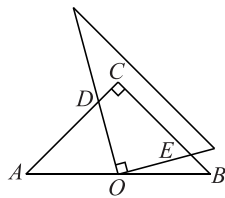


图 1-ZT-6

► 模型三 外角平分线模型

方法点睛

在正方形 $ABCD$ 中,点 E 在射线 CB 上, EF 交外角 $\angle DCG$ 的平分线(图 1-ZT-7①)或其所在直线(图②)于点 F , $AE \perp EF$,则有 $AE = EF$.

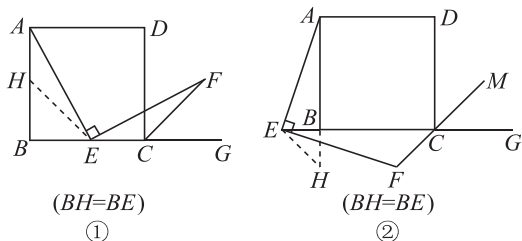


图 1-ZT-7

3. 如图 1-ZT-8, 四边形 $ABCD$ 是正方形, E 是边 BC 上任意一点, $\angle AEF = 90^\circ$, 且 EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F .

求证: $AE = EF$.

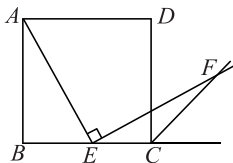


图 1-ZT-8

变式 如图 1-ZT-9, 四边形 $ABCD$ 是正方形, E 是边 BC 上一点, 且 $\angle AEF = 90^\circ$, EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F . 若正方形的边长是 8, $EC = 2$, 则 FC 的长为_____.

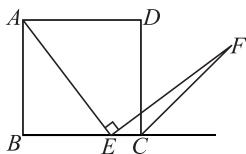


图 1-ZT-9

► 模型四 半角模型

方法点睛

如图 1-ZT-10, 在正方形 $ABCD$ 中, 若 $\angle EAF = 45^\circ$, 则:

- ① $EF = BE + DF$; ② $C_{\triangle EFC} = 2AB$;
- ③ FA 平分 $\angle DFE$, EA 平分 $\angle BEF$;
- ④ $MN^2 = BM^2 + DN^2$.

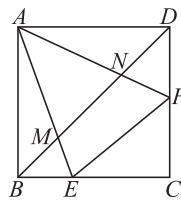


图 1-ZT-10

4. 如图 1-ZT-11, 正方形 $ABCD$ 的边长为 6, E , F 分别是 AB , BC 边上的点, 且 $\angle EDF = 45^\circ$, 将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle DCM$.

(1) 求证: $EF = CF + AE$;

(2) 当 $AE = 2$ 时, 求 EF 的长.

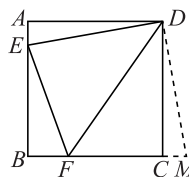


图 1-ZT-11

变式 如图 1-ZT-12, 在正方形 $ABCD$ 中, $\angle EAF$ 的两边分别交 CB , DC 的延长线于点 E , F , 且 $\angle EAF = 45^\circ$. 若 $BE = 1$, $DF = 7$, 则 $EF =$ _____.

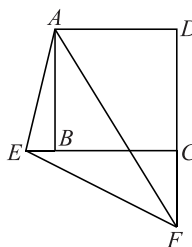


图 1-ZT-12

专题训练(二) 与特殊平行四边形相关的折叠问题

教材母题探源

(教材 29 页 19 题(1))

如图 2-ZT-1,将矩形纸片 $ABCD$ 沿 BE 折叠,顶点 A 落在纸片 $ABCD$ 内的点 A' .展开纸片,得到四边形 $ABA'E$,这个四边形有哪些性质?

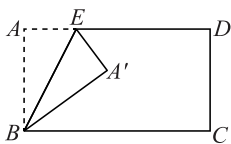


图 2-ZT-1

拓展思考:连接 AA' ,则 AA' 与 BE 是什么位置关系?

题型分类专练

► 题型一 求线段的长度

► **典型例题** (2025 交大附中一模) 如图 2-ZT-2,正方形 $ABCD$ 的边长为 6,将正方形 $ABCD$ 折叠,使顶点 D 落在 BC 边上的点 E 处,点 A 落在点 F 处,折痕为 GH .若 E 恰好是 BC 的中点,则线段 CH 的长为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. $\frac{9}{4}$

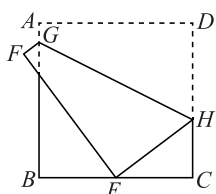


图 2-ZT-2

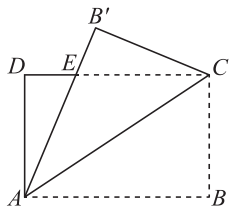


图 2-ZT-3

► 变式训练

- (2025 宝鸡三迪中学月考) 如图 2-ZT-3,将一张长方形纸片 $ABCD$ 沿 AC 折叠,重叠部分为 $\triangle ACE$,若 $AB = 6$, $BC = 4$,则重叠部分 ($\triangle ACE$) 的面积为_____.
- (2024 西安铁一中开学考) 如图 2-ZT-4,将矩形 $ABCD$ 对折,使 AB 边与 CD 边重合,展开后得到折痕 MN ,再将矩形 $ABCD$ 沿过点 D

的直线折叠,使点 A 的对应点 A' 落在 MN 上,折痕为 DE , $AB = 10$, $BC = 6$,则 $A'N$ 的长为 ()

- A. $10 - 3\sqrt{3}$ B. 4
C. $10 - 2\sqrt{3}$ D. 3

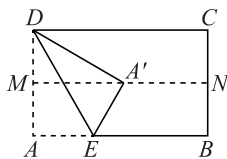


图 2-ZT-4

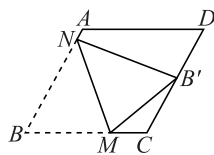


图 2-ZT-5

- 如图 2-ZT-5,菱形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 8$, $\angle B = 60^\circ$,将该菱形纸片折叠,使点 B 恰好落在 CD 边的中点 B' 处,折痕与边 BC , BA 分别交于点 M , N ,则 CM 的长为_____.

► 题型二 求角度

► **典型例题** (2025 西安长安区期中) 如图 2-ZT-6,在菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, E 是 CD 上一点,将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠,点 D 的对应点为 D' , AD' 与 BC 交于点 F .若 F 为 BC 的中点,则 $\angle AED$ 的度数为 ()

- A. 45° B. 60° C. 75° D. 90°

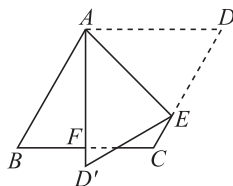


图 2-ZT-6

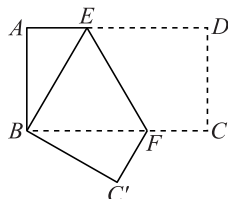


图 2-ZT-7

► 变式训练

- (2025 西安未央区期末) 如图 2-ZT-7,将长方形纸片 $ABCD$ 折叠,使点 D 与点 B 重合,点 C 落在点 C' 处,折痕为 EF .如果 $\angle ABE = 30^\circ$,那么 $\angle EFB$ 的度数为 ()
A. 60° B. 75° C. 45° D. 30°

- 如图 2-ZT-8,将正方形 $ABCD$ 沿 BE 对折,使点 A 落在对角线 BD 上的点 A' 处,连接 $A'C$,则 $\angle BA'C =$ _____.

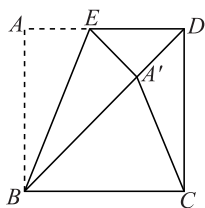


图 2-ZT-8

专题训练(三) 特殊平行四边形中相关的最值问题

► 类型一 垂线段最短

1. (2023 西安莲湖区期中) 如图 3-ZT-1, 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$, P 是斜边 AB 上的一个动点, 且点 P 在 AB 上(不包含端点)运动的过程中, 始终保持 $PD \parallel BC$, $PE \parallel CD$, F 是 DE 的中点, 连接 PF , 则 PF 的最小值是 ()

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{6}{5}$

C. $\frac{12}{5}$

D. $\frac{24}{5}$

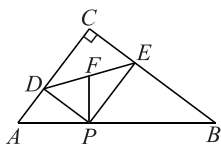


图 3-ZT-1

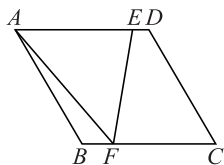


图 3-ZT-2

2. (2025 西安八十九中开学考) 如图 3-ZT-2, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 120^\circ$, $BC = 2\sqrt{6}$, E, F 分别是 AD, BC 边上的两个动点, 连接 AF, EF . 若 FA 平分 $\angle BFE$, 则 AE 的最小值为 _____.

► 类型二 两定点 + 一动点 → 线段和的最小值

方法点睛

【思路方法】

- 找点: 找其中一个定点关于动点所在的直线的对称点, 化“折”为“直”.
- 求值: 构造直角三角形, 利用勾股定理求值.

3. 如图 3-ZT-3, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, E 是 AB 的中点, P 是 BD 上的一个动点, 则 $PA + PE$ 的最小值为 _____.

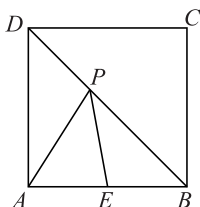


图 3-ZT-3

4. (2024 西安曲江一中期末)

如图 3-ZT-4, 在菱形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于

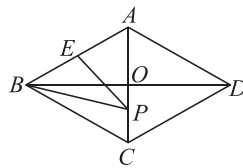


图 3-ZT-4

点 O , $AB = 4$, $BD = 4\sqrt{3}$,

E 为 AB 的中点, P 为线段 AC 上的动点, 则 $EP + BP$ 的最小值为 _____.

5. 如图 3-ZT-5, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $AD = 10$, 点 E 在 AD 上, 且 $DE = 2$. 点 G 在 AE 上, 且 $GE = 4$, P 为 BC 边上的一个动点, F 为 EP 的中点, 求 $GF + EF$ 的最小值.

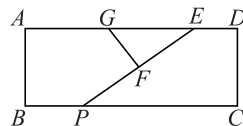


图 3-ZT-5

► 类型三 一定点 + 两动点 → 线段和的最小值

方法点睛

【基本类型】

如图 3-ZT-6, BC 是 $\angle MBN$ 的平分线, A 是 BM 上的一个定点, E, D 分别为 BA, BC 上的两个动点, 求 $DA + DE$ 的最小值.

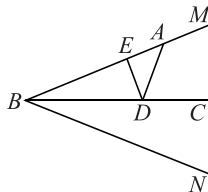


图 3-ZT-6

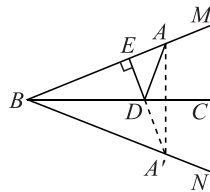


图 3-ZT-7

【思路方法】

- 找点: 如图 3-ZT-7, 找点 A 关于 BC 的对称点 A' , 实现化“折”为“直”, 过点 A' 作 $A'E \perp AB$ 于点 E , 交 BC 于点 D , 则 $A'E$ 的长即为 $DA + DE$ 的最小值.
- 求值: 利用勾股定理求出 $A'E$ 的长.

6. 如图 3-ZT-8, 在菱形 $ABCD$ 中, $AD=2$, $\angle ABC=120^\circ$, E 是 BC 边上的动点, P 为对角线 AC 上的动点, 则 $PE+PB$ 的最小值为_____.

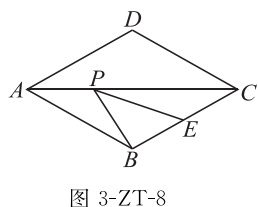


图 3-ZT-8

7. 如图 3-ZT-9, 正方形 $ABCD$ 的边长是 5, $\angle DAC$ 的平分线交 DC 于点 E , 若 P, Q 分别是 AD, AE 上的动点, 求 $DQ+PQ$ 的最小值.

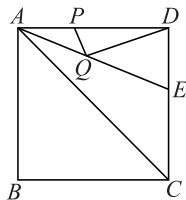


图 3-ZT-9

9. 如图 3-ZT-12, 在边长为 4 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle A=60^\circ$, M 是 AD 边的中点, N 是 AB 边上一动点, 将 $\triangle AMN$ 沿线段 MN 所在的直线翻折得到 $\triangle A'MN$, 连接 $A'C$, 则线段 $A'C$ 长度的最小值是_____.

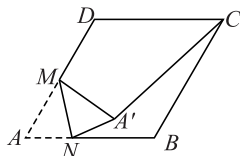


图 3-ZT-12

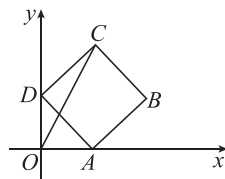


图 3-ZT-13

10. 如图 3-ZT-13, 在平面直角坐标系中, 点 A, D 分别在 x 轴, y 轴的正半轴上运动, 第一象限内的正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 则 OC 的最大值为_____.

题型二 构造全等三角形后利用三边关系

11. 如图 3-ZT-14, 已知平面内三点 A, B, C , $AB=4, AC=3$, 以 BC 为对角线作正方形 $BDCE$, 连接 AD , 则 AD 的最大值是 ()

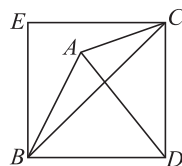


图 3-ZT-14

- A. 5 B. 7 C. $7\sqrt{2}$ D. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

► 类型四 单线段最值 → 利用三边关系找最值

题型一 直接构造三角形利用三边关系

8. (2025 咸阳实验月考) 如图 3-ZT-10, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3, BC=8$, E 是 CB 延长线上的动点, 连接 AE , $DF \perp EA$ 交 EA 的延长线于点 F , 连接 BF , 则 BF 的最大值为_____.

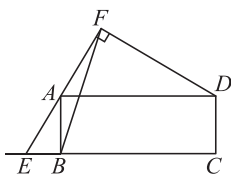


图 3-ZT-10

方法指引 如图 3-ZT-11 取 AD 的中点 O , 连接 OB, OF .

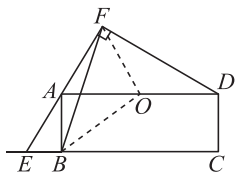


图 3-ZT-11

方法指引 如图 3-ZT-15, 将 $\triangle BDA$ 绕点 D 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle CDM$, 连接 AM .

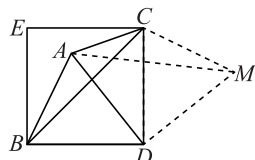


图 3-ZT-15

12. 如图 3-ZT-16, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $\angle D=60^\circ$, 点 E, F 分别在边 AD, BC 上 (均可与端点重合), 连接 AF, BE . 若 $AE=CF$, 则 $AF+BE$ 的最小值为_____.

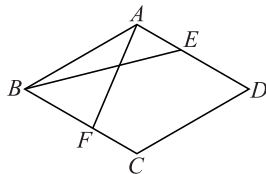


图 3-ZT-16

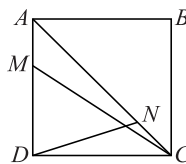


图 3-ZT-17

13. 如图 3-ZT-17, 在正方形 $ABCD$ 中, M, N 分别是边 AD 和对角线 AC 上的动点, 且 $AM=CN$, 连接 CM, DN , 当 $CM+DN$ 的最小值为 $\sqrt{6}$ 时, 正方形 $ABCD$ 的边长为_____.

专题训练(四) 四边形的平分面积问题

【知识储备】

如图 4-ZT-1, 连接平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O , 过点 O 作直线 EF 交 AD 于点 E , 交 BC 于点 F .

由平行四边形的性质得 $OD = OB, AD \parallel BC \rightarrow \angle ADB = \angle CBD \rightarrow \triangle ODE \cong \triangle OBF \rightarrow S_{\triangle DOE} = S_{\triangle BOF} \rightarrow S_{\text{四边形} ABFE} = S_{\text{四边形} FCDE}$.

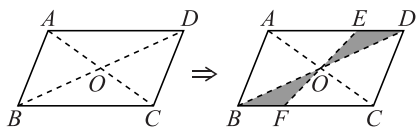


图 4-ZT-1

► 题型一 平分特殊四边形的面积

1. 如图 4-ZT-2, 在平面直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的顶点 A 和 C 分别落在 x 轴和 y 轴的正半轴上, $AO = 4$, $CO = 2$, 直线 $y = x + 1$ 以每

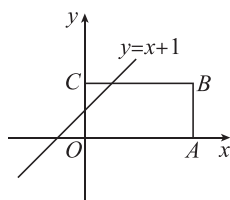


图 4-ZT-2

秒 1 个单位长度的速度向下平移, 经过 _____ 秒该直线可将矩形 $OABC$ 的面积平分.

2. 如图 4-ZT-3, 在平面直角坐标系中, 边长为 6 的正方形 $ABCD$ 在第一象限内, 且 $AB \parallel x$ 轴, 点 A 的坐标为 $(10, 8)$, 直线 l 经过点 O 和点 C , 将直线 l 沿 y 轴上、下平移.

(1) 若直线 l 与正方形 $ABCD$ 只有一个交点, 则平移后的直线 l 的表达式为 _____;

(2) 若直线 l 恰好平分正方形 $ABCD$ 的面积, 且直线 l 分别与 x 轴、 y 轴交于点 E, F , 求 $\triangle EFO$ 的面积.

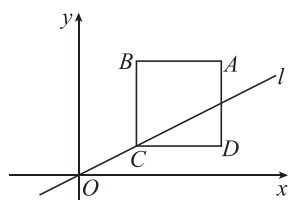


图 4-ZT-3

► 题型二 过一定点平分面积的相关计算

3. 如图 4-ZT-4, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $\angle B = 60^\circ$, 点 E 在边 AD 上, 且 $AE = 2$. 若直线 l 经过点 E , 将该菱形的面积平分, 并与菱形的另一边交于点 F , 则线段 EF 的长为 _____.

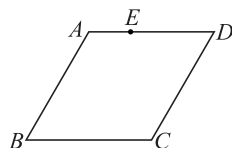


图 4-ZT-4

4. 如图 4-ZT-5, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $\angle BAD = 120^\circ$, E 是 AD 上一点, 且 $AE = 1$, 过点 E 的直线与 BC 交于点 F . 若 EF 平分菱形 $ABCD$ 的面积, 求四边形 $ABFE$ 的周长.

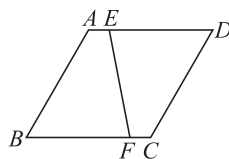


图 4-ZT-5

作内嵌于正方形的正八边形

(教材习题变式) 作矩形的最大内接菱形的方法:

顶点在矩形边上的菱形叫作矩形的内接菱形. 在实践活动课上, 数学老师提出来一个问题“如何从一张矩形纸片中制作出一个最大的内接菱形”. 实践小组成员经过思考后, 给出了 3 种不同的方法.

方法一: 通过折, 将矩形纸片横对折后再竖对折, 沿对角线剪一刀得到一个直角三角形, 展开后就是菱形 $EHGF$ (如图 1-S-1①), 则四边形 $EHGF$ 是矩形 $ABCD$ 的内接菱形.

方法二: 通过叠, 取两个大小一样的矩形纸片, 让两矩形的长两两相交, 两对顶点重合, 重叠的部分形成四边形 $AECF$, 则四边形 $AECF$ 也是矩形 $ABCD$ 的内接菱形 (如图②).

方法三: 通过尺规作图, 作矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的垂直平分线 EF , 与 AD 边交于点 E , 与 BC 边交于点 F , 连接 AF, CE , 则四边形 $AECF$ 是矩形 $ABCD$ 的内接菱形.

实践小组通过对三种方法得到的菱形进行分析、讨论、计算、对比, 从而得出矩形的最大内接菱形.

任务:

- (1) 图①中菱形 $EHGF$ 的面积与矩形 $ABCD$ 的面积之比为 _____;
- (2) 尺规作图: 请你在图③中完成“方法三”的作图过程; (保留作图痕迹, 不用写作法)
- (3) 若在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6, BC=18$, 请你根据三种方法, 通过计算求出此矩形的内接菱形的面积的最大值.

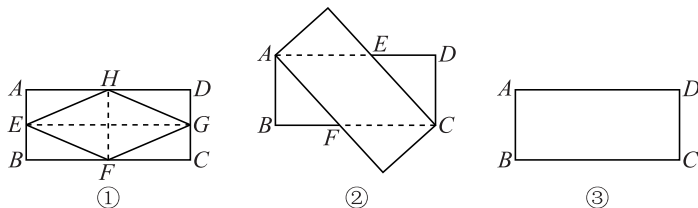
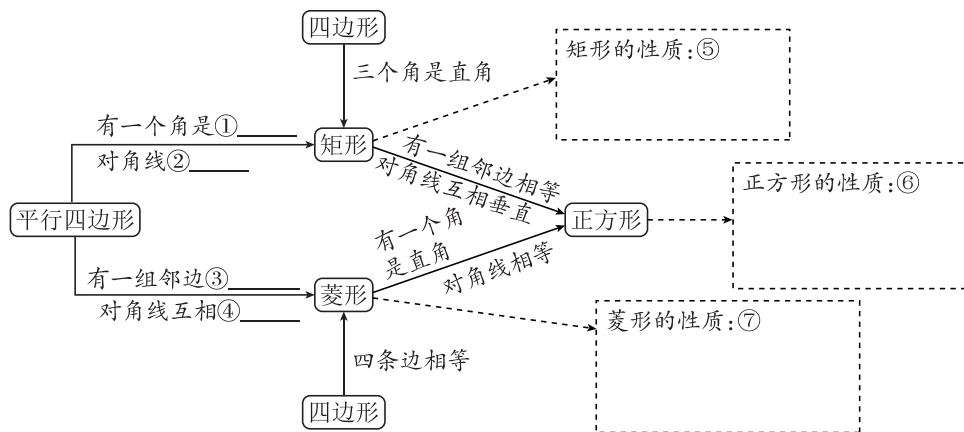


图 1-S-1

知识结构关系



核心要点回顾

核心要点一 菱形的性质与判定

1. 关于菱形的性质,以下说法不正确的是 ()

A. 四条边相等 B. 对角线相等
C. 对角线互相垂直 D. 是轴对称图形

2. 如图 1-X-1,在菱形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O , E 为 AB 的中点,且 $DE \perp AB$,则 $\angle ABC$ 的度数是_____.

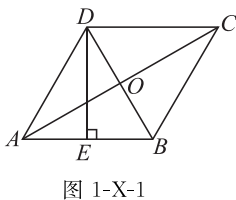


图 1-X-1

3. 如图 1-X-2,在 $\square ABCD$ 中,点 E, F 分别在边 BC, AD 上, AC 与 EF 交于点 O ,且 EF 垂直平分 AC ,连接 AE, CF .

(1)求证:四边形 $AECF$ 是菱形;

(2)若 $AC \perp AB$, $\angle B = 30^\circ$, $AE = 6$,求四边形 $AECF$ 的面积.

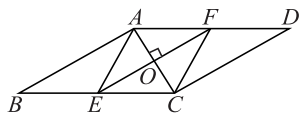


图 1-X-2

核心要点二 矩形的性质与判定

4. 如图 1-X-3,矩形 $ABCD$ 的两条对角线的一个夹角为 60° ,两条对角线的长度之和为 24 cm ,则这个矩形的一条较短边的长为 ()

A. 12 cm B. 8 cm C. 6 cm D. 5 cm

5. 如图 1-X-4,在平面直角坐标系 xOy 中,矩形 $OABC$ 的顶点 A, C 的坐标分别是 $(4, -2)$, $(1, 2)$,点 B 在 x 轴上,则点 B 的横坐标是_____.

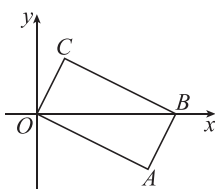


图 1-X-4

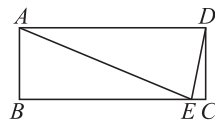


图 1-X-5

6. 如图 1-X-5,在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 13$, $AB = 5$, E 为 BC 上一点, ED 平分 $\angle AEC$,则 CE 的长为_____.

7. 如图 1-X-6,四边形 $ABCD$ 是菱形,对角线 AC 和 BD 相交于点 O , E 是 CD 的中点,过点 D 作 $DF \parallel AC$ 交 OE 的延长线于点 F ,连接 CF .

(1)求证: $\triangle COE \cong \triangle DFE$.

(2)①求证:四边形 $OCFD$ 是矩形;

②若 $AD = 10$, $\angle ABC = 60^\circ$, 求 OA 和 OF 的长度.

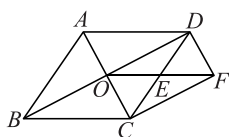


图 1-X-6

核心要点三 直角三角形斜边上的中线的性质

8. (2025 德阳) 如图 1-X-7, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 沿 CB 方向向右平移至 $\triangle EGF$ 处, 使 EF 恰好过边 AB 的中点 D , 连接 CD , 若 $CD = 1$, 则 GE 的长为 ()

A. 3 B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

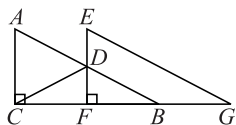


图 1-X-7

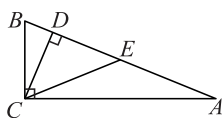


图 1-X-8

9. 如图 1-X-8, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 8$, $CD \perp AB$ 于点 D , $\angle ACD = 3\angle BCD$, E 是边 AB 的中点, 则 DE 的长是 _____.

核心要点四 正方形的性质与判定

10. (2025 乐山) 如图 1-X-9, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O . 小乐同学欲添加两个条件使得四边形 $ABCD$ 是正方形, 现有三个条件可供选择: ① $AC \perp BD$; ② $AC = BD$; ③ $\angle ADC = 90^\circ$, 则正确的组合是 _____ (只需填一种组合即可).

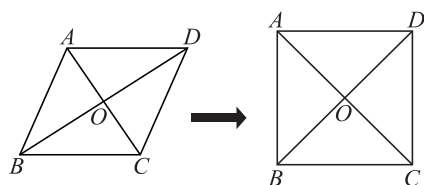


图 1-X-9

11. (2025 北京) 如图 1-X-10, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 CD 上, $CF \perp BE$, 垂足为 F . 若 $AB = 1$, $\angle EBC = 30^\circ$, 则 $\triangle ABF$ 的面积为 _____.

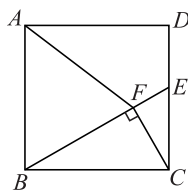


图 1-X-10

Q 综合素养提升

12. 如图 1-X-11, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 过点 C 的直线 $MN \parallel AB$, D 为 AB 边上一点, 过点 D 作 $DE \perp BC$, 交 BC 于点 F , 交直线 MN 于点 E , 连接 CD , BE .

(1) 求证: $CE = AD$;

(2) 当 D 为 AB 的中点时, 四边形 $BECD$ 是什么特殊四边形? 说明你的理由;

(3) 在满足(2)的条件下, 当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时, 四边形 $BECD$ 是正方形? (不必说明理由)

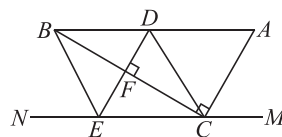


图 1-X-11